Dr. Martin Friesen & Jonas Kremer

Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Seien $A := (0,\infty) \times (0,\infty)$ und $B := (1,2) \times (2,3) \times (0,2)$ Berechnen Sie die Integrale

$$\int_A y \exp\left(-\left(1+x^2\right) y^2\right) m(\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}y) \quad \text{und} \quad \int_B \frac{2z}{(x+y)^2} m(\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}y)m(\mathrm{d}z).$$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei die messbare Abbildung $f : [0,\infty) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,k) = \frac{e^{-x/k}}{k^2}.$$

Sei ν das Zählmaß auf $2^{\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie den Wert der Integrale

$$\int_{[0,\infty)} \int_{\mathbb{N}} f(x,k)\mathrm{d}\nu(k)\mathrm{d}m(x) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,\infty)} f(x,k)\mathrm{d}m(x)\mathrm{d}\nu(k)$$

und entscheiden Sie, ob f bezüglich des Produktmaßes $m \otimes \nu$ integrierbar ist, d.h. ob $f \in \mathcal{L}^1([0,\infty) \times \mathbb{N}, \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes 2^{\mathbb{N}}, m \otimes \nu)$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geqslant 0, \text{ und } y \in [x, x+1), \\ -1, & \text{falls } x \geqslant 0, \text{ und } y \in [x+1, x+2), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)m(\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}y) \neq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)m(\mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x).$$

Begründen Sie, weshalb Ihr Ergebnis kein Widerspruch zum Satz von Fubini darstellt.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Seien $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $f(x,y) = xy$ und $g(x,y) = (x - y^2, x^2 y)^\top$. Skizzieren Sie $g(\Omega)$ und berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes das Integral

$$\int_{g(\Omega)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$